Sul problema dell'identificazione di Benacerraf dal punto di vista dei matematici

Marco Pellegrini*

MP0004-2025-02-22

Contents

*Istituto di Informatica e Telematica del CNR, Via G. Moruzzi 1, 56100-Pisa (Italy).
email: marco.pellegrini@iit.cnr.it, web: http://www.iit.cnr.it/staff/marco.pellegrini/

1 Prologo

Un saggio di Paul Joseph Salomon Benacerraf (1930 – 2025) del 1965 [1] inizia narrando la storia di due matematici-bambini, Ernie e Johnny, ognuno educato rigidamente dai propri matematici-genitori in una particolare versione dell'aritmetica di Peano [2] avente un unico modello/rappresentazione nella teoria degli insiemi. Solo che i modelli sono diversi nelle due famiglie. Seguiamo l'evoluzione separata dei due matematici-bambini fino a che non si incontrano e scambiandosi le proprie note si accorgono che vi sono "teoremi" (notare il virgolettato) che sono verificati in un modello ma non nell'altro, e cominciano a litigare.

Inoltre si suppone che un filosofo platonista abbia seguito tutta l'evoluzione culturale delle due famiglie e sia ora a ragionare su quale possa essere il "vero" modello dell'aritmetica di Peano tra i due considerati. Un filosofo platonista per definizione dovrebbe supporre che solo uno dei due modelli sia quello "vero" (ossia che incarna l'essenza del numero in tutto e per tutto) o forse nessuno dei due, ma certo non entrambi. Il filosofo platonista ragiona al modo della logica aristotelica, ossia evitando terze posizioni (tertium non datur) e contraddizioni (una proposizione non può esser simultaneamente vera e falsa), inoltre per motivi a noi non noti è prono ad applicare il principio di ragione insufficiente [3]. Quindi l'autore, abbandonati i due ragazzi ai loro litigi nello sfondo, osserva il ragionamento del filosofo platonista. A grandi linee, il passo iniziale consiste nel ricondurre il fenomeno dei due "teoremi" veri/falsi nei due modelli ad una caratteristica elementare dei due modelli. Ossia al fatto lo stesso numero naturale $n \geq 2$ viene identificato (usando il simbolo '=') a due insiemi diversi, chiamiamoli $I(n)$ ed $I'(n)$, nei due modelli[1]. Ma la proprietà transitiva dell'uguaglianza ci porterebbe ad affermare che $I(n) = I'(n)$ quando invece evidentemente sono insiemi diversi[2]. Non volendo rinunciare alla proprietà transitiva dell'uguaglianza il filosofo platonista è ora ridotto nella situazione in cui deve dichiarare solo uno dei due modelli, o nessuno, "vero" (ossia il modello in cui l'eguaglianza tra numero e insieme è quella autentica) e l'altro falso, o entrambi, (ossia quello per cui l'eguaglianza tra numero e insieme è fittizia, di facciata, magari utile per fare calcoli, ma essenzialmente privo di significato profondo). Per non finire come l'asino di Buridano sempre indeciso tra i due mucchi di fieno equivalenti, applicando il principio di ragione insufficiente, conclude che entrambi i modelli devono essere necessariamente falsi.

Qui entra l'autore, che ha osservato fino ad ora con benevolenza la storia, i pensieri e le convinzioni dei due matematici-bambini e delle loro famiglie, ed inoltre ha osservato forse con meno benevolenza il filosofo platonista che seguendo il filo dei propri ragionamenti ha certificato in modo autonomo e senza alcun aiuto dall'esterno il fallimento dell'impresa di identificare l'essenza del numero con quella di insieme. L'autore generalizza osservando che ci sono infiniti possibili modelli dell'aritmetica di Peano che possono essere costruiti nella teoria degli insiemi, ma per ogni coppia di modelli diversi si ricasca nella stessa trappola che il filosofo-platonista ha costruito per se stesso. Da qui in poi l'autore parla in prima persona dimenticandosi del filosofo-platonista, delle due famiglie di matematici, e dello strano fenomeno dei "teoremi" verificati in un modello ma non in un'altro.

Da notare l'indulgenza di fondo dell'autore per le due famiglie di matematici, ed invece la soddisfazione nel vedere il rivale filosofo-platonista cadere nella propria rete e così sgomberare il campo.

Cosa succede dopo? A noi ora non interessa stabilire chi abbia ragione o torto tra il filosofo-platonista e l'autore sull'essenza del numero. Ciò che narriamo da qui in poi non può (non dovrebbe) essere usato nè pro nè contro le due scuole filosofiche che si fronteggiano nel saggio. Ci interessa invece seguire la storia delle due famiglie di matematici oltre l'ambito angusto del saggio. Come in 'Carnage' (film di Roman Polanski del 2011) le due famiglie organizzano un incontro (senza i bambini) per appianare le proprie divergenze e giungere ad un accomodamento, alle spalle e senza preoccuparsi troppo degli altri personaggi della storia, e di quello che dicono o pensano di loro. Le due famiglie (padre e madre) sono i Montecchi per Ernie ed i Capuleti per Johnny.

[1] Per i numeri 0 ed 1 invece gli insiemi corrispondenti nei due modelli coincidono.

[2] Per esempio il numero 3 è associato in un modello con l'insieme $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$, mentre nel secondo modello con $\{\{\{\phi\}\}\}$, dove con ϕ indichiamo l'insieme vuoto.

2 Dialogo

2.1 Prima giornata

Montecchi (Modello I) e Capuleti (Modello II) si trovano insieme di fronte ad un buon boccale di birra, la tensione comincia a sciogliersi e le due coppie si mettono a proprio agio, fino al punto da poter fare la domanda fatidica: "Potreste mostrarci il modello insiemistico che usate per sviluppare la Vostra aritmetica di Peano? Chiamiamola PA." Al che mostrando ognuno all'altro il proprio modello, entrambe le coppie vedono spuntare un sorriso d'intesa sul volto dell'altra.

Capuleti : "Cari Montecchi, non ci sarebbe bisogno di parole tra noi matematici scafati, ma siccome siamo qui per chiarire dobbiamo dichiararci. Cominciate pure voi."

Montecchi: "Certamente cari Capuleti, temo, come certo anche voi state pensando, che siamo di fronte ad un caso di doppio abuso di notazione. Ossia il simbolo '=' non va inteso come un simbolo di uguaglianza/identità tra numeri ed insiemi, invece prende il posto di una notazione piu' precisa che definisce una una funzione f con dominio tra i numeri naturali N e co-dominio tra gli insiemi definita dallo schema ricorsivo:

$$f(0) \stackrel{\text{def}}{=} \phi$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x-1) \cup \{f(x-1)\} \quad se \quad x > 0$$

per il modello I, che crediamo sia dovuto a John von Neumann [4] per cui potremmo chiamare tale famiglia di insiemi I_{vn}. Similmente avremo nel modello II un'altra funzione g con dominio tra i numeri naturali N e co-dominio tra gli insiemi definita dallo schema ricorsivo:

$$g(0) \stackrel{\text{def}}{=} \phi$$

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g(x-1)\} \quad se \quad x > 0$$

Questo modello è dovuto, crediamo, a Ernst Zermelo [5] per cui chiameremo tale famiglia di insiemi con I_{ez}. Interessante, se $x \in N$ è 0 o 1 otteniamo gli stessi insiemi, poi da $x \geq 2$ otteniamo insiemi diversi."

Montecchi: "E' interessante che queste codifiche sono 1-1 e quindi invertibili ossia dato un insieme $a \in I_{vn}$ esiste un unico numero $x \in N$ tale che $f(x) = a$, il che ci permette di definire la funzione inversa F con dominio su I_{vn} e con valori in N. Similmente abbiamo una funzione 1-1 tra N e gli insiemi in I_{ez} e la sua funzione inversa G con dominio in I_{ez} e codominio N. Combinando le funzione f e la funzione G abbiamo un funzione 1-1 con dominio in I_{ez} e codominio in I_{vn}. Combinando F e g abbiamo la sua funzione inversa. Questo ci permette di associare in modo univoco ed invertibile ad un insieme in un modello un unico insieme all'altro modello senza dover nemmeno menzionare il numero a cui entrambi corrispondono."

Capuleti : "Interessante, potremmo concludere che le due rappresentazioni sono isomorfe e inoltre entrambe preservano gli assiomi di Peano, per cui i teoremi della PA derivabili nei due modelli sono gli stessi."

Montecchi : "Certamente la notazione si è appesantita, ma dovrebbe preservarci dal cadere vittima di equivoci se dovessimo interpretare, Dio ce ne scampi e liberi, il simbolo '=' come equivalenza/identità, cosa che non può che portare a conseguenze disastrose."

Capuleti: "Ci sembra di ricordare che Dedekind abbia dimostrato che tutti i modelli per l'aritmetica di Peano del secondo ordine sono isomorfi tra loro nel lontano 1888. Chissà se questo c'entra qualcosa."

2.2 Seconda giornata

Montecchi: “Rimane il mistero di proposizioni che sono vere in un modello di PA ma risultano essere false nell’altro. Ma non credo che possiamo attribuire ciò a questioni elementari tipo abuso di notazione o problemi con la transitività della relazione di uguaglianza/identità”

Capuleti: “Forse ci conviene interpellare i giganti sulle cui spalle stiamo comodamente seduti per scrutare l’orizzonte. Crediamo che la Teoria dei Modelli (Model Theory) potrebbe aiutarci, oppure i teoremi di Goedel. Rileggiamo i testi sacri, come per esempio nel bel rendiconto che ho trovato in un corso di Logica Matematica del 2004 al MIT di Boston [6].”

3 La riconciliazione tra i matematici

Una volta stabilito abbastanza facilmente che il segno $=$ non indica identità ma è usato come abbreviazione di $\stackrel{\text{def}}{=}$ che indica la definizione di una funzione da un domino (numeri naturali) ad un altro (insiemi di di Zermelo-Fraenkel [7]), le due famiglie hanno stabilito che quindi non è possibile applicare le proprietà transitive dell’identità nel trattare queste definizioni.

Rimane come giustificare l’apparente anomalia di proposizioni che sembrano teoremi se valutati tra insiemi I_{vn}, preferiti da Ernie, mentre non lo sembrano se valutati tra gli insiemi I_{ez}, preferiti da Johnny, e viceversa.

Tornando alle basi, consultano un bel corso di logica matematica del MIT del 2004 che si trova facilmente on-line [6]. La lezione 17 tratta delle interpretazioni, ossia di come si traduce una proposizione dal linguaggio dell’aritmetica (LA) di Peano ad un altro linguaggio, nel nostro caso il linguaggio della teoria degli insiemi (LI) di Zermelo–Fraenkel.

Nel linguaggio della teoria degli insiemi abbiamo i simboli della logica del primo ordine ed una solo predicato binario ‘appartiene a’ indicato con $\in$.

Nel linguaggio dell’aritmetica abbiamo i simboli della logica del primo ordine e alcuni predicati (binari e ternari) che indicano: successore (S), addizione (A), moltiplicazione (M), esponenziazione (E) e ‘minore-di’ (L). Dobbiamo avere quindi sottomano formule di LI che sostituiscano tali predicati aritmetici (S, A, M, E ed L) inoltre servono formule $N(x)$ e $Z(x)$ che rappresentano i predicati “x è un insieme associato ad un numero naturale” , e “x è un insieme associato a zero” dove x prende valori tra tutti gli insiemi. Queste formule saranno naturalmente diverse per i sistemi ez e vn, ma le regole per la traduzione che seguono non dipendono da quale dei due sistemi si usi, basta sceglierne uno in modo coerente.

A questo punto una formula dell’aritmetica in linguaggio LA è tradotta in una formula in LI abbastanza meccanicamente, tranne che per un dettaglio, quello dei quantificatori. L’espressione $\forall x$... e $\exists x$... nel linguaggio LA indicano che x ha valori nel dominio dei numeri. La stessa espressione nel linguaggio degli insiemi LI indica che x come ha valori nel dominio degli insiemi. Tuttavia esistono insiemi che non sono associati a numeri, quindi il modo della traduzione deve tenere ciò in considerazione. In particolare si traduce $\forall x P(x)$ in LA con $\forall x(N(x) \to P(x))$ in LI, dove $P(x)$ è una qualunque formula in cui x sia una variabile libera. Notiamo che per gli insiemi in LI che non corrispondono numeri l’antecedente dell’implicazione è sempre falso per cui l’implicazione è vera per tali insiemi.

Similmente, $\exists x P(x)$ in LA si traduce con $\exists x(N(x) \wedge P(x))$ in LI, Notiamo che per gli insiemi in LI che non corrispondono numeri la prima parte della congiunzione è sempre falsa, per cui la congiunzione è falsa per tali insiemi.

Vediamo ora cosa succede al teorema in questione in LA proposto da Ernie, che afferma che un numero x (insieme) e’ minore di un’altro numero y (insieme) se e solo se x e’ un elemento di y. Qui n è la funzione generica che associa numeri ad insiemi: Partiamo quindi da una formula di LA più la funzione n :

$$\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow n(x) \in n(y)) \tag{1}$$

diventa nel linguaggio LI:

$$\forall x \forall y (N(x) \rightarrow (N(y) \rightarrow ((L(x,y) \leftrightarrow x \in y))) \tag{2}$$

Per Ernie che usa il sistema di von neuman N, L ed n sono : N_{vn} L_{vn} ed n_{vn} quindi il teorema stabilito da Ernie nel linguaggio LI è:

$$\forall x \forall y (N_{vn}(x) \rightarrow (N_{vn}(y) \rightarrow (L_{vn}(x,y) \leftrightarrow x \in y))) \tag{3}$$

A questo punto il padre e la madre di Johnny guardano ciò che stato scritto e concordano che anche per loro questo è un teorema che il figlio può accettare (anche se un poco vacuo dato che gli antecedenti $N_{vn}(x)$ e $N_{vn}(y)$ sono sempre falsi sugli insiemi I_{ez}, tranne che per gli insiemi che corrispondono a 0 ed 1).

Il discorso di mutuo riconoscimento naturalmente funziona anche per i teoremi di Johnny una volta tradotti correttamente nel linguaggio LI, ossia usando $(S_{ez}, A_{ez}, M_{ez}, E_{ez}, L_{ez})$ ed N_{ez}, Z_{ez} nella traduzione, con le stesse regole di cui sopra per trattare i quantificatori.

Notiamo che per conciliare i due ragazzi non è servito nessun teorema profondo della logica, non abbiamo dovuto invocare i teoremi d'incompletezza di Geodel, o preoccuparci se ogni formula vera della PA sia formalmente dimostrabile, etc... Non abbiamo nemmeno dovuto invocare la teoria dei modelli e preoccuparci troppo degli assiomi. Qui solo un poco di accortezza sintattica ha risolto la situazione.

A questo punto due delle difficoltà matematiche emerse nel discorso di pagina 54/55 di [1] sono evaporate. Ne rimangono altre?? Ci sarebbe la questione della cardinalità dell'insieme che rappresenta un numero, ma questa la lasciamo e un'altro giorno, dato che a ciascun giorno basta la sua pena. Inoltre, il discorso sulle cardinalità è introdotto allo scopo di confutare alcune teorie di Gottlob Frege (1848 - 1925), ma per il resto è tangenziale al discorso principale in [1].

Notiamo lo stile matematico nel risolvere la questione usando quando possibile solo regole sintattiche e il trucco della lumaca, che si porta dietro la casina in forma di conchiglia. In questo caso i teoremi devono portarsi dietro tutti i loro antecedenti per poter passare da un linguaggio ad un'altro, altrimenti si rischia di perdere pezzi nel trasloco. Questo rigore sintattico diventa però magicamente rigore semantico dato che non lascia ambiguità nella traduzione e quindi non lascia spazio per falsi dilemmi.

4 Il dialogo riprende: terza giornata

Montecchi : "Ci sembra quindi che siamo tutti d'accordo che gli asseriti "teoremi" veri/falsi nei due modelli di AP in LI non sono teoremi in quanto non rispettano le regole per tradurre una preposizione da un linguaggio all'altro. Invece le proposizioni enunciate in modo sintatticamente corretto sono egualmente veri (quindi per definizione teoremi) o falsi in entrambi i Modelli."

Capuleti: "Ci chiediamo se non siamo stati troppo rigidi nel nostro approccio educativo che ha insegnato un solo modello nel linguaggio LI ai nostri giovani, e che questo sia la sorgente dell'equivoco."

Montecchi: "Mia moglie ed io lo escludiamo. Infatti le regole per tradurre da LA a LI sono formulate per trattare in modo corretto gli insiemi che non corrispondono a numeri versus insiemi che corrispondono a numeri nel modello. Tali regole vanno usate a prescindere dal fatto che si sia a conoscenza dell'esistenza di modelli diversi da quello adottato."

Capuleti : "E' venuto il momento di fare entrare i ragazzi e spiegare loro come nascono i teoremi."

5 Impatto sul discorso del filosofo-platonista

A pagina 56 secondo paragrafo in [1], il filosofo-platonista riassume la situazione in una biforcazione per cui deve ammettere:

(A) che simultaneamente $3 = 3_{vn}$ e $3 = 3_{ez}$, oppure
(B) che almeno uno dei due sistemi (*ez* o *vn*) non sia corretto (per motivi vari), ma forse anche che nessuno dei due sia corretto.
ed inoltre che:
(C) non vi sono altre alternative (anche se questo non viene detto esplicitamente).
Il discorso prosegue, dismettendo (A) molto velocemente per via della transitività dell'eguaglianza e del fatto che ovviamente $3_{vn} \neq 3_{ez}$. Poi il testo comincia a trattare (B) con una lunga disamina che si conclude a pagina 62 con la conclusione che nessuno dei due sistemi è corretto.

Che dire alla luce della riconciliazione tra le famiglie di Ernie e Johnny. Questa riconciliazione può avere un impatto sul discorso del filosofo-platonista? Sarebbe facile ora far vedere che in realtà (C) non sussiste in quanto l'alternativa c'è, ossia quella di dare al simbolo = il suo giusto significato nel contesto, che non è quello di identità. In altre parole saremmo di fronte ad un caso di "falsa dicotomia" [8]. Tuttavia, tuttavia, c'è ancora qualcosa di utile e di sottile da estrarre dal discorso su (B). Questo discorso si riduce all'osso in una applicazione del "principio di ragione insufficiente" in ambito Booleano.

6 Il principio di ragione insufficiente

Il "principio di ragione insufficiente" detto anche "principio di indifferenza" [3] viene usato sotto varie forme in diverse interpretazioni dei fenomeni probabilistici o fenomeni dovuti a credenza. In nuce questo principio stabilisce che se non abbiamo buone ragioni per attribuire probabilità diverse ad eventi simili tra loro, allora a tutti dovrebbero essere attribuita la stessa probabilità. Per esempio in un esperimento ideale in cui si getti un dado a 6 facce, ad ogni faccia è attribuita una probabilità 1/6 di apparire dopo il lancio (dato che per motivi di simmetria non abbiamo motivo di considerare una faccia meno probabile di un'altra). Un'altro uso di tale principio nella teoria Bayesiana delle probabilità come credenza consiste nell'attribuire un probabilità *a priori* uniformi ad eventi di cui non sappiamo nulla (non avendo ancora fatto gli opportuni esperimenti che possono modificare la probabilità *a posteriori*).

E' noto che tale principio in probabilità va trattato con cura, dato che un uso non qualificato porta per esempio ai paradossi di Bertrand [9] e ad altri simili. Il dibattito è ancora aperto se tali paradossi siano inevitabili oppure risolvibili con opportune limitazioni (vedi [10]).

L'uso di tale principio in ambito Booleano comporta una traslazione dal dominio numerico continuo delle probabilità a quello Booleano discreto del vero/falso (e senza terze possibilità).

Una versione semplificato del filo del ragionamento seguito dal platonista di Benacerraf è il seguente: vi sono due visioni (*vn* e *ez*) per cui si vuole stabilire se sia vero/falso che esse rappresentano fedelmente in tutto e per tutto i numeri naturali come insiemi. Una tabella esaustiva delle possibilità in forma di matrice è la seguente:

$$\begin{pmatrix} & vn & ez \\ a) & vero & vero \\ b) & vero & falso \\ c) & falso & vero \\ d) & falso & falso \end{pmatrix} \tag{4}$$

Per la legge del terzo escluso e per il principio di non contraddizione una ed una sola delle 4 righe a), b) c) o d) deve essere corretta (ad esclusione di tutte le altre). Riga a) viene esclusa perché corrisponde alla situazione A) già discussa che il filosofo-platonista ritiene essere contraddittoria. Righe b) e c) trattano in modo diverso le condizioni *vn* ed *ez*, mentre , seguendo il principio di ragione insufficiente, si dovrebbero trattare *vn* ed *ez* in modo uguale dando alle due visioni lo stesso valore di verità/falsità, per cui si può escludere b) e c). Alla fine solo d) sopravvive e necessariamente deve essere la conclusione corretta.

Questo schema di ragionamento può senz'altro essere esteso a k visioni, si può costruire una tabella con k colonne e con 2^k righe in cui la prima riga ha tutti i valori 'vero', l'ultima ha tutti i valori 'falso' e in mezzo le restanti $2^k - 2$ righe sono miste (con valori sia veri che falsi). Il principio di ragione insufficiente porterà ad escludere tutte le righe miste, per cui alla fine si dovrà scegliere solo tra la prima e l'ultima riga. Se esiste un argomento ausiliario per escluderne una, l'altra vince.

Abbiamo già visto come nel problema discusso dal filosofo-platonista di Benacerraf alla luce della riconciliazione tra i matematici, abbiamo un'indicazione di come questo argomento ausiliario su A) non sia poi così cogente. Ma guardiamo oltre ciò.

7 Come fare sparire almeno un piccione

In questo breve paragrafo intendo mostrare come il "principio di ragione insufficiente" in ambito Booleano/Discreto sia problematico anche quando applicato da solo (ossia senza la necessità di argomenti ausiliari per discriminare tra due possibilità superstiti). Per fare ciò cercheremo di applicarlo parallelamente al principio dei cassetti, detto anche legge del buco della piccionaia, (in inglese "pigeonhole principle") [11] e vediamo che cosa ne esce.

Supponiamo di aver $n+1$ piccioni classici ideali (non muoiono, non figliano, non se ne vanno in giro al buio, e non possono stare in uno stato di sovrapposizione quantistica) che la notte vanno a dormire in n buchi di piccionaia, per $n \geq 2$.

La legge del buco della piccionaia ci assicura che vi sarà almeno un buco di piccionaia contenente due o più piccioni.

Vediamo ora lo stesso problema dal punto di vista del filosofo platonista di Benacerraf armato del principio di ragione insufficiente Booleano/Discreto. Il platonista chiede al matematico: "Puoi tu affermare che il primo buco contiene sempre due o più piccioni?" Al che il matematico risponde che non lo può affermare. Il platonista quindi chiede al matematico la stesso domanda relativa al secondo, al terzo, e così via fino all'n-esimo buco, ricevendo sempre la stessa risposta negativa. Quindi ragionando il platonista conclude che rispetto agli n buchi siamo nella stessa condizione di conoscenza/ignoranza e non abbiamo motivo di trattarli in modo diverso, quindi li tratteremo tutti in modo uguale, per cui ogni buco deve avere lo stesso numero di piccioni. Se tale numero è zero, siamo riusciti nell'impresa di far sparire $n+1$ piccioni, se tale numero è 1, allora avremo concluso che un piccione è scomparso. Che tale numero sia due o superiore a due lo possiamo escludere dato che dovremmo creare ex-nihilo almeno $n-1$ piccioni, cosa che possiamo escludere come assurda anche nel nostro modello ideale. Quindi alla fine avendo esaminato tutti i numeri possibili sappiamo che almeno un piccione è scomparso e nessun buco contiene due o più piccioni.

8 Ancora sui piccioni: La prova sperimentale può aiutare?

I buchi dei piccioni sono posti molto in alto e nessuno ha voglia di prendere una scala di notte per andare a vedere in ogni buco e contare i piccioni che contiene. D'altronde sia il matematico che il filosofo sono molto convinti del proprio ragionamento e ognuno vorrebbe che fosse l'altro ad impegnare tempo e fatica in una verifica sperimentale. D'altronde nemmeno una verifica sperimentale sarebbe qui conclusiva, dato che i piccioni reali, al contrario di quelli ideali, possono morire, figliare, bighellonare la notte, e persino essere in sovrapposizione quantistica (come i gatti di Schroedinger). Probabilmente converrebbe fare esperimenti con oggetti inanimati come bussolotti di latta e biglie di vetro. Ma anche qui un esperimento con 10 bussolotti e 11 biglie cosa ci può dire di definitivo per il caso $n > 11$? Di fronte a queste difficoltà sia pratiche che teoretiche i due rinunciano alla prova sperimentale.

9 Ironia della filosofia

Nel mito classico della caverna platonica si pone l'umanità in analogia con prigionieri che fin dall'infanzia siano stati costretti a vivere al fondo di una caverna con le spalle rivolte all'uscita e che vedano degli oggetti del monde esterno solo le ombre che la luce del sole getta sul fondo della caverna. I poveri prigionieri si interrogano sulla natura di ciò che vedono, ma sono naturalmente confusi. Il filosofo è colui che spezzate le catene, esce, e con fatica vede gli oggetti nella loro vera natura e torna nella caverna per svelare la verità ai suoi sventurati compagni e così liberare anche essi [12].

Nell'articolo di Benacerraf i nostri due matematici-bambini sono posti e incatenati con le spalle all'uscita in due caverne diverse (anche se ad un certo punto comunicanti) ed ognuno dei due vede degli oggetti esterni illuminati dal sole (i numeri naturali) solo l'ombra sul fondo della sua caverna (una traduzione dei numeri naturali come insiemi), ed inoltre sono due ombre assai diverse. I poveri matematici-bambini si interrogano sulla natura di ciò che vedono, ma sono naturalmente ancora più confusi dei loro colleghi di prima, i quali almeno vedevano la stessa ombra su cui discutere. Il filosofo-platonista di Benacerraf tuttavia fallisce nel suo scopo esistenziale in quanto, benché sia uscito dalla caverna, ancora ragiona delle ombre invece che degli oggetti nella loro vera natura, e soprattutto non torna a consolare i compagni rimasti incatenati. Sul piano etico, il filosofo-platonista ideato da Benacerraf è un ben povero platonista.

10 Sull'utilità dei paradossi in filosofia e in matematica

La filosofia occidentale ed i suoi paradossi sono nati più o meno insieme verso il VII secolo a.C. nell'area culturale della Grecia classica. I paradossi del moto di Zenone sono tra i più antichi riportati e ancora discussi al giorno d'oggi [13]. Tra i paradossi moderni i più famosi sono forse quelli insiemistici di Russell [14].

L'utilità dei paradossi sta nello stimolo che danno nello sviluppare nuova filosofia o nuova matematica o entrambi, oltre che nella soddisfazione intima di poter metter in crisi con piccole storielle di poche righe comprensibili da tutti costruzioni teoretiche astruse che occupano svariati volumi. Sono uno stimolo a tenere sotto controllo i ragionamenti quando questi si liberano in volo troppo lontano dal terreno.

Leggendo estratti dell'articolo di Benacerraf ampiamente riportati in [15] e [16] mi sono chiesto se il dilemma descritto nelle sezioni I e II sia effettivamente un paradosso della matematica. Non mi risulta che i matematici si siano messi al lavoro per aggiustare l'aritmetica e così ovviare a tale paradosso. L'articolo di Benacerraf viene invece ampiamente citato nella letteratura filosofica e gli si da credito di aver dato il là ad almeno due nuovi filoni d'indagine in filosofia della matematica. Non è così palese che cosa possa determinare il fatto che un non-problema per un matematico possa diventare invece un problema centrale in una branca della filosofia. Col ché ho pensato valesse la pena di esplorare questo fenomeno borderline tra due discipline per capire in cosa differiscono pur quando in apparenza stanno parlano della stessa cosa.

11 Zermelo, Von Neumann e Benacerraf

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 - 1953) [5] e John von Neumann (1903 – 1957) [4] sono stati due matematici attivi all'inizio del XX secolo nell'area dei fondamenti della Matematica (e per John von Neumann in tante altre aree della Matematica). Molti dei risultati principali in Logica Matematica riportati nel corso citato del MIT [6] risalgono alla metà degli anni '30 del XX secolo.

L'articolo di Paul Joseph Salomon Benacerraf (1930 – 2025) è del 1965 quindi tutto ciò di cui discutono i due matematici-bambini ed i loro genitori ed il modo come si sono conciliati erano cose assai note al momento in cui tale articolo fu scritto. Quindi non credo proprio che l'autore fosse ignorante del fatto che il paradosso proposto fosse in realtà vacuo per i matematici.

Qui entra in gioco il fatto essenziale che ad osservare la scena non è l'autore ma un supposto filosofo platonista che è ossessionato dalla nozione di identità, e dei cui pensieri l'autore cerca solo di seguire il filo, fino a che questi stessi pensieri non si ritorcano contro l'ipotesi iniziale. Quindi anche se l'autore vede il platonista incartarsi nei propri stessi ragionamenti non farà nulla per riportarlo sulla retta via, assaporando già fin dall'inizio la sua sconfitta definitiva.

In altre parole, accettare fin dall'inizio al soluzione dei matematici per evitare gli apparenti paradossi implica la rinuncia ad impostare il problema di cosa sia il numero in termini d'identità del concetto di numero con qualcosa d'altro (qui con gli insiemi nella teoria di Zermelo-Fraenkel). Il platonista di Benacerraf invece vuole fortemente impostare il problema come un probleme di identità (nella più pura tradizione filosofica) e quindi accetta di buon grado l'equivoco di confondere ($=$ con $\stackrel{\text{def}}{=}$) nell'esaminare i sistemi di Ernie e Johnny (i quali a loro volta allevati nelle caverne, non possono avvertire il platonista dell'equivoco). Né l'autore intende fermare il platonista nella sua folle corsa, alla fine comunque sarebbe arrivato presto o tardi alla stessa conclusione, che "i numeri non possono essere insiemi" che era dove lui voleva che il platonista arrivasse, ma per la strada più lunga possibile. Il problema dei "teoremi" veri/falsi dui due modelli sembra più che altro una falsa pista (in inglese una "red herring").

Figure 1: John von Neumann

Figure 2: Ernst Zermelo

Figure 3: Paul Benacerraf

12 Ossessione per la definitezza

Una visione pedestre del rapporto tra il lavoro del matematico e quello del filosofo vorrebbe il matematico come intento a definire, precisare, analizzare fino alla più piccola virgola ogni aspetto del problema, sfuggendo ogni ambiguità anche con l'aiuto di linguaggi formali al posto di quello naturale. Inoltre tale visione vorrebbe il filosofo invece a suo agio tra le ambiguità del linguaggio naturale, capace di fare con sicurezza grandi balzi concettuali sorretto da secoli di abitudine alla dimostrazione logica/filosofica a partire dai dialoghi Platonici e dalla logica Aristotelica fino alla moderna Dialettica, passando per la Scolastica Medioevale.

Invece la triste storia dei piccioni scomparsi a causa del principio di ragione insufficiente male applicato ci dimostra che il matematico tramite il principio del cassetto non ha bisogno di vedere o sapere esattamente quale buco contiene due o più piccioni, gli basta sapere che esiste senza sapere quale sia, egli può anche dare un nome simbolico a tal buco, pur non sapendo quale buco sia, e da li proseguire nelle dimostrazioni (vedi la sofisticata teoria combinatorica di Frank P. Ramsey (1903 – 1930) [17]). Il matematico non si preoccupe dell'indefinitezza della situazione, anzi la sfrutta a proprio vantaggio.

Al contrario il filosofo platonista descritto in [1] per cercare di avere una conoscenza assoluta e granitica mettendo i puntini su tutte le i continua a fare domande sbagliate/inutili cercando di identificare con esattezza dove dovrebbero essere i famigerati due o più piccioni. Al che, dopo n defatiganti domande, assicuratosi della totale equivalenza dal punto di vista conoscitivo degli n buchi, si sente autorizzato ad usare il principio di ragione insufficiente per fare sparire almeno un piccione in modo da far tornare i conti dei piccioni come fosse un prestidigitatore. L'eccesso di precisione insieme a principi mal applicati lo ha portato a conclusioni errate, senza che ne abbia consapevolezza. Per il caso dei modelli insiemistici dei numeri naturali interviene poi anche la fallacia della falsa dicotomia a complicare un poco più le cose componendosi con l'ossessione per la definitezza e con il principio di ragione insufficiente.

13 Epilogo

L'articolo di Benacerraf si compone di tre parti ("Gallia est omnis divisa in partes tres") di cui la prima e la seconda sono la 'pars destruens' in cui domina il filosofo platonista che obtorto collo alla fine della seconda parte deve ammettere che "i numeri non possono essere insiemi". La terza parte inizia una discussione 'pars construens' in cui si cerca di re-impostare il problema di cosa possono essere i numeri, se non possono essere insiemi.

In questo breve saggio cerchiamo di analizzare le sezioni I e II, e non diciamo nulla sulla III. Abbiamo mostrato come i paradossi invocati sono risolvibili facilmente in matematica, per cui sono considerati non-problemi e meritano al massimo una nota a piede pagina. Abbiamo poi visto che il modo di ragionare del platonista è irto di pericoli nascosti dovuti ad un uso disinvolto del principio di ragione insufficiente in un ambito estraneo da quello in cui è originato.

Tuttavia se il ragionamento è problematico non ne consegue che la conclusione sia falsa (ossia la conclusione “i numeri non possono essere insiemi” può benissimo essere quella corretta).

I dilemmi matematici da cui parte la discussione non sono tali per i matematici stessi, che operano in modo sistematico e attento alla sintassi dei linguaggi usati (LA e LI) e alle regole su come tradurre l'una nell'altra. Se il filosofo platonista avesse considerato le soluzione del paradosso apparente avanzata dai matematici allora avrebbe probabilmente cercato una via diversa, anche se non è detto che avrebbe potuto trovare una soluzione diversa.

Il matematico si comporta come il generale di un esercito con una logistica pesante che si porta dietro lentamente e con notevoli sforzi su lunghe distanze tutto ciò di cui può aver bisogno perchè non si sa mai che trappole ha escogitato il nemico e bisogne essere pronti a parare ogni eventualità. Il filosofo-platonista di Benacerraf si comporta come il generale di un esercito leggero che punta tutto sulla velocità e viaggia senza salmerie al seguito in territorio nemico vivendo di quello che può offrire il territorio cercando di tenere il nemico sempre sbilanciato ed incapace di reagire.

14 Bibliografia

[1] Paul Benacerraf (1965), “What Numbers Could Not Be”, Philosophical Review Vol. 74, pp. 47–73

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_indifference

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Zermelo

[6] https://ocw.mit.edu/courses/24-242-logic-ii-spring-2004/

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel_set_theory

[8] https://it.wikipedia.org/wiki/Falsa_dicotomia vedi una discussion più approfondita in https://en.wikipedia.org/wiki/False_dilemma).

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)

[10] November, Dan D. “The Indifference Principle, its Paradoxes and Kolmogorov's Probability Space.” (2019).

[11] https://it.wikipedia.org/wiki/Principio_dei_cassetti

[12] https://it.wikipedia.org/wiki/Mito_della_caverna

[13] https://it.wikipedia.org/wiki/Paradossi_di_Zenone

[14] https://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_di_Russell

[15] Horsten, Leon, “Philosophy of Mathematics”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/philosophy-mathematics/.

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Benacerraf's_identification_problem

[17] https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Ramsey

[18] Avron, Arnon, and Balthasar Grabmayr. “Breaking the Tie: Benacerraf's Identification Argument Revisited.” Philosophia Mathematica 31.1 (2022): 81-103.

A Note

1) Un recente articolo di Arnon e Gramayr [18] è un utile punto di riferimento per riassumere lo stato dell'arte sulla discussione accademica e sulla ‘fortuna’ del problema dell'identificazione. La tesi centrale dell'articolo [18] è che ci sono motivazioni valide per preferire uno dei due modelli confrontati (quello di von Neumann) per cui un passaggio importante dell'argomentazione nell'articolo del 1965 [1] verrebbe a cadere. Le problematiche e le tesi evidenziate in [18] sono assai diverse da quelle esposte in questo saggio.

2) Nel coso dell MIT citato [12], il predicato "minore di" nel linguaggio LI per il modello di von Neumann è definito come

$$L(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \in y \tag{5}$$

il che però renderebbe il teorema di Ernie una tautologia (indipendentemente dagli antecedenti). Questo effetto indesiderato può essere ovviato adottando una definizione alternativa e altrettanto valida del tipo:

$$L(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z(N(z) \wedge \neg Z(z) \wedge A(x, z, y)) \tag{6}$$

dove diciamo che x e' minore di y se esiste un numero z diverso da zero per cui l'addizione di x e z è uguale a y. Naturalmente il predicato $A(x, z, y)$, così come $N()$ e $Z()$ in LI vanno definiti senza usare $L(x, y)$ per evitare circolarità nelle definizioni.

3) Nel confronto tra il principio della piccionaia e il principio di ragione insufficiente nella Sezione 7 la domanda del filosofo riguardo ad ogni specifico buco potrebbe essere cambiata o variata, ma il risultato rimarrebbe lo stesso. Il problema risiede nel tentativo di inferire conoscenza su di uno specifico buco sapendo con determinazione di quale buco stiamo parlando.

4) Dal corso del MIT [6] risulta chiaro che vi sono diverse varianti dell'aritmetica di Peano, che differiscono principalmente nel tipo di quantificazioni ammesse (le teorie del primo ordine quantificano sui numeri, quelle del secondo ordine quantificano su numeri ed insiemi di numeri) e sul modo di trattare gli assiomi di induzione. Infine ci sono altre varianti in cui si possono scambiare alcuni assiomi con alcuni teoremi, oppure associare assiomi ausiliari, formalmente derivabili dagli altri assiomi, ma che vengono aggiunti agli assiomi necessari per convenienza nelle dimostrazioni. Il discorso presentato nell'articolo [1] non dipende da questi dettagli, e per semplicità ci riferiamo ad una teoria del primo ordine.